基于二级GHZ态的有限级量子纯态的多方量子隐形传态*

杨宇光 温巧燕
北京邮电大学 理学院，北京 100876

摘要 有限级未知量子纯态不仅可以通过共享的两级EPR纠缠态隐形传态到一组两级粒子上，而且可以在一定条件下在多方之间进行隐形传态. 文中提出的方案表明 N 方可以利用处于二级最大纠缠 Greenberger-Horne-Zeilinger 态的 $(N+M)\cdot L(2^L\geqslant d_1d_2d_3\cdots d_N$，$d_i$ 为 N_i 所隐形传态的未知量子态的维数)个粒子把 N 个未知量子态隐形传态给 M 个其他方. 也表明二级最大纠缠态粒子可以用来同时对两个量子态进行双向隐形传态.

关键词 二级GHZ态 有限级量子纯态 量子隐形传态 离散Fourier变换

量子隐形传态是量子信息理论的核心内容. 在Bennett等[1]的原始方案中，两方Alice和Bob共享一最大纠缠EPR粒子对. 利用一简单协议，Alice把一未知量子态隐形传态给Bob. Bennett等还把结果推广到 d 级粒子. 隐形传态的新方法已经激发了众多研究团体的兴趣. 他们开始对量子隐形传态研究并在理论和实验方面取得了很大发展. 也推广到连续变量[2, 3]的情况. Yu等通过提出一对规范的量子相位和数共轭研究了有限级未知态的量子隐形传态[4]. 随后有限级量子系统隐形传态的实验[5]已经激发了一系列的讨论[6]. 人们从各种方面开始了对这一课题的进一步研究[7—9]. 文献[10，11]已开始了一些可能的应用. Karlsson等[8]以及Hilley等[12]建议了一种方案，在该方案中，三方(Alice，Bob1和Bob2)共享三粒子最大纠缠态. Alice对一未知量子态进行隐形传态，协议的结果是原始的未知量子态被编码在Bob1和Bob2共享的两粒子纠缠态中，Bob1和Bob2都不能单独重构该未知量子态. 然而当他们合作且使用本地操作和经典通信(LOCC)时，只有一方才能重构原始未知量子态. 在文献[13—15]中也考虑了利用 d 级量子态进行多方之间的量子隐形传态.

一般来说，量子隐形传态无论采取何种形式，遵循4个步骤(可以从Bennett的原始方案[1]清楚地看出)：(a) 制备EPR纠缠态；(b)发送者作Bell基测量；(c)发送者通过经典信道通知接收者他的测量结果；(d)接收者根据该经典信息实施幺正操作. 然而，步骤(b)是不必要的，因为它可由非本地的幺正变换和本地测量(这儿“本地”意味着对单个粒子进行操作)替代. 具体地说，对发送者的EPR粒子和未知量子态粒子作幺正变换使它们以及接收者的EPR粒子形成某种纠缠，而本地测量是对发送者的粒子单独进行测量. 这些测量将造成发送者所有粒子的态塌缩在确定的态. 在通信的结束，接收者将得到利用Bell基测量相同的结果. 换句话说，幺正变换和本地测量等价于Bell基测量. 从文献[16]可进一步得到没必要进行步骤(b)的证据，在该文献中，Brassard等指出有可能在量子网络中利用受控的非门和单个量子比特操作实现隐形传态.

与以往利用共享的 $d(d>2)$ 级最大纠缠粒子态进行多方之间的量子隐形传态方案不同，该论文中的方案所使用的共享粒子态是由 L 个2级Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)最大纠缠态组成的多信道. 假设

2005-01-31 收稿，2005-04-15 收修改稿
* 国家自然科学基金(批准号：60373059)和教育部博士点基金(批准号：20040013007)资助项目
E-mail：yangyang7357@sina.com

有三方(Alice, Bob, Charlie)共享 $3L$ 个 2 级 GHZ 最大纠缠态粒子. Alice 和 Bob 分别拥有一 d_1 级和 d_2 级的未知量子态($d_1d_2\leqslant 2^L$). 利用本文第一节的协议能使 Alice 和 Bob 利用上述所共享的 L 个 2 级 GHZ 最大纠缠态组成的多信道把他们的未知量子态隐形传态给 Charlie. 协议的结果是 Charlie 将拥有 L 个包含了被隐形传态的两个未知量子态的相同信息的粒子. 在这里必须提到的是待隐形传态的未知量子态的 Hilbert 空间和接收方 Charlie 的粒子的 Hilbert 空间不相同，前者是两个粒子的 d 级量子态，后者是 L 个 2 级 GHZ 粒子. 但从更高维的 Hilbert 空间我们可以选取一个等价于低维的子空间. 在这里我们选取 $d_1d_2\leqslant 2^L$ 且 $d_1d_2>2^{L-1}$，使 L 是实现协议的最小数目. 从 L 个 2 级粒子的 Hilbert 空间选取 d_1d_2 个归一化的正交矢量作为子空间的基，使它们映射到未知量子态的 d_1d_2 个本征矢量上. 我们也考虑了相反的情况. 让 Charlie 拥有一个包含了两个 d_1 级和 d_2 级的量子态信息的 d ($d=d_1d_2$) 级未知量子态. Charlie 能把第一个 d_1 级量子态隐形传态给 Alice，把第二个 d_2 级量子态隐形传态给 Bob. 两个协议都可以推广到 $N(N>3)$ 方. 最后，考虑了在多个发送方和多个接收方之间进行量子隐形传态的情况. 表明 L 个 2 级 GHZ 粒子态可作为双向信道，即：如果 Alice 和 Bob 共享 L 个 2 级 EPR 粒子对，Alice 能把一 d_1 级量子态隐形传态给 Bob，Bob 能把一 d_2 级量子态隐形传态给 Alice.

1 多方到一方的量子隐形传态

给 GHZ 粒子标上序号 0，1，…，$L-1$. 假设三方(Alice, Bob, Charlie)共享 $3L$ 个 2 级 GHZ 最大纠缠态粒子，相应地 Alice，Bob 和 Charlie 拥有的粒子分别标为 A_0，A_1，…，A_{L-1}；B_0，B_1，…，B_{L-1}；C_0，C_1，…，C_{L-1}. 每一 A_k，B_k，C_k 粒子所处的 GHZ 态可选为如下形式：

$$|\Phi>_{A_k,B_k,C_k}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>_{A_k}|0>_{B_k}|0>_{C_k}+|1>_{A_k}|1>_{B_k}|1>_{C_k}). \tag{1}$$

假设 Alice 和 Bob 分别拥有一 d_1 级和 d_2 级的未知量子态($d_1d_2\leqslant 2^L$).

Alice 拥有的 d_1 级未知量子态设为 $\left|\varphi\right>_1=\sum_{i=0}^{d_1-1}\alpha_i\left|i\right>$，其中 $\sum_{i=0}^{d_1-1}|\alpha_i|^2=1$.

Bob 拥有的 d_2 级未知量子态设为 $\left|\varphi\right>_2=\sum_{j=0}^{d_2-1}\beta_j\left|j\right>$，其中 $\sum_{j=0}^{d_2-1}|\beta_j|^2=1$. (2)

Alice 和 Bob 想要把他们的未知量子态隐形传态给 Charlie.

一个数可由它的二进制形式表示. 例如，一个十进制数 n 可分解成 L 位的二进制数 $n=2^{L-1}\cdot n_{L-1}+\cdots+2^1\cdot n_1+2^0\cdot n_0$，其中 $2^L\geqslant n$，$n_k=0$，1，$k=0$，1，…，$L-1$. n 可表示为

$$n=\overline{n_{L-1}\cdots n_1n_0}. \tag{3}$$

另一方面，任何二进制数有它的十进制形式. 如果我们把 L 个粒子 A_0，A_1，…，A_{L-1}；B_0，B_1，…，B_{L-1}；C_0，C_1，…，C_{L-1} 看作量子比特，每个态 $|n_{L-1}>_{A_{L-1}}\cdots|n_1>_{A_1}|n_0>_{A_0}=|n_{L-1}\cdots n_1n_0>_A$；$|n_{L-1}>_{B_{L-1}}\cdots|n_1>_{B_1}|n_0>_{B_0}=|n_{L-1}\cdots n_1n_0>_B$；$|n_{L-1}>_{C_{L-1}}\cdots|n_1>_{C_1}|n_0>_{C_0}=|n_{L-1}\cdots n_1n_0>_C$ ($n_k=0$，1，$k=0$，1，…，$L-1$) 将对应一个二进制数 $\overline{n_{L-1}\cdots n_1n_0}$，用 $|\bar{n}>$ 简化态表示，

$$|\bar{n}>=|n_{L-1}\cdots n_1n_0>. \tag{4}$$

则 Alice 拥有的 d_1 级未知量子态 $|\varphi>_1$，Bob 拥有的 d_2 级未知量子态 $|\varphi>_2$，以及三方所共享的 GHZ 最大纠缠态所组成的复合系统的量子态为

$$\begin{aligned}|\Phi>_{\text{total}}&=|\varphi>_1\otimes|\varphi>_2\otimes\cdot\prod_{k=0}^{L-1}|\Phi>_{A_k,B_k,C_k}\\&=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_m\beta_j|m>_1\\&\quad|j>_2|\bar{n}>_A|\bar{n}>_B|\bar{n}>_C,\end{aligned} \tag{5}$$

其中，$N=2^L$.

Alice 对自己拥有的未知量子态 $|\varphi>_1$ 和所拥有的 L 个 2 级 GHZ 粒子作 U_{1A} 幺正操作，U_{1A} 可定义为

$$U_{1A}|m>_1|\bar{n}>_A=\frac{1}{\sqrt{d_1}}\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{d_1-1} e^{\frac{2\pi ikm}{d_1}} \mid k>_1 \mid \overline{f(k,m,n)}>_A, \qquad (6)$$

式中 $m=0, 1, \cdots, d_1-1$，$f(k, m, n)$是由 k，m，n 决定的十进制数．$|\overline{f(k, m, n)}>$是 N 个本征态之一．我们可以把 k，m 和 $f(k, m, n)$表示成如下二进制形式：

$$\begin{aligned} k &= \overline{k_{L-1}\cdots k_1 k_0}, \\ m &= \overline{m_{L-1}\cdots m_1 m_0}, \\ f(k,m,n) &= \overline{f_{L-1}(k,m,n)\cdots f_1(k,m,n) f_0(k,m,n)}, \\ k_i, m_i, f_i(k,m,n) &= 0,1 (i=0,1,\cdots,L-1). \quad (7) \\ f_i(k,m,n) &= k_i \oplus m_i \oplus n_i, \quad (8) \end{aligned}$$

式中“$\oplus$”表示加模 2．容易证明 U_{1A} 的幺正性，且可看出

$$< \overline{f(k,m,n)} \mid \overline{f(k,m',n)} > = \delta_{mm'}, \qquad (9)$$

式中 m，$m'=0, 1, \cdots, d_1-1$．

令 $w=e^{\frac{2\pi i}{d}}(d=d_1 d_2)$．在 U_{1A} 操作之后，总的量子态为

$$\left|\Phi\right>^1_{\text{total}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}}\sum_{k=0}^{d_1-1}\left\{ w^{d_2 km}\left|k\right>_1 \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_m\beta_j\left|j\right>_2\left|\overline{n}\right>_B \left|\overline{n}\right>_C\left|\overline{f(k,m,n)}\right>_A\right\}. \qquad (10)$$

Alice 分别对未知量子态粒子和 A_0，A_1，$\cdots$，A_{L-1} 进行投影测量，则 Bob 和 Charlie 的粒子处于量子态

$$\begin{aligned} \left|\Phi(k)\right>^2 = \sum_{m=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\Big\{ &\alpha_m\beta_j w^{d_2 km}\left|j\right>_2 \Big| (f_{L-1}(k,m,n)\oplus k_{L-1}\oplus m_{L-1})\cdots \\ &(f_1(k,m,n)\oplus k_1\oplus m_1)(f_0(k,m,n)\oplus k_0\oplus m_0)>_B \\ &|(f_{L-1}(k,m,n)\oplus k_{L-1}\oplus m_{L-1})\cdots \\ &(f_1(k,m,n)\oplus k_1\oplus m_1)(f_0(k,m,n)\oplus k_0\oplus m_0)>_C\Big\}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Alice 将测量结果 k，$f_i(k, m, n)(i=0, 1, \cdots, L-1)$通知 Bob 和 Charlie.

则 Bob 作以下幺正操作：

$$\begin{aligned} w^{d_2 km} \mid (f_{L-1}(k,m,n)\oplus k_{L-1}\oplus m_{L-1})>_{B_{L-1}} &\longrightarrow \mid m_{L-1}>_{B_{L-1}}, \\ \mid f_i(k,m,n)\oplus k_i\oplus m_i>_{B_i} &\longrightarrow \mid m_i>_{B_i}, \end{aligned} \qquad (12)$$

式中 $i=0, 1, \cdots, L-2$.

Charlie 作以下幺正操作：

$$\mid f_i(k,m,n)\oplus k_i\oplus m_i>_{C_i} \longrightarrow \mid m_i>_{C_i},$$

式中 $i=0, 1, \cdots, L-1$.

则 Bob 和 Charlie 的粒子所处的量子态为

$$\begin{aligned} \left|\Phi\right>^3 &= \sum_{m=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\alpha_m\beta_j\left|j\right>_2\left|m_{L-1}\cdots m_1 m_0\right>_B\left| m_{L-1}\cdots m_1 m_0\right>_C \\ &= \sum_{m=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\alpha_m\beta_j\left|j\right>_2\left|\overline{m}\right>_B\left|\overline{m}\right>_C. \end{aligned} \qquad (13)$$

Bob 对拥有的未知量子态和 L 个 GHZ 粒子作 U_{2B} 幺正操作，U_{2B} 可定义为

$$U_{2B} \mid j>_2 \mid \overline{m}>_B = \frac{1}{\sqrt{d_2}} \cdot \sum_{k=0}^{d_2-1} e^{\frac{2\pi ikj}{d_2}} \mid k>_2 \mid \overline{g(k,m,j)}>_B, \qquad (14)$$

式中 $j=0, 1, \cdots, d_2-1$.

类似于(6—9)式中的 $f(k, m, n)$，

$$g_i(k,m,j) == k_i \oplus m_i \oplus j_i, i=0,1,\cdots,L-1, \qquad (15)$$

式中“$\oplus$”表示加模 2．容易证明 U_{2B} 的幺正性，在 U_{2B} 操作之后，总的量子态为

$$\left|\Phi\right>^4 = \frac{1}{\sqrt{d_2}}\sum_{k=0}^{d_2-1}\left\{\left|k\right>_2\sum_{m=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1} \cdot \alpha_m\beta_j w^{d_1 kj}\left|\overline{m}\right>_C\left|\overline{g(k,m,j)}\right>_B\right\}. \qquad (16)$$

Bob 分别对未知量子态和 B_0，B_1，$\cdots$，B_{L-1} 进行投影测量，则 Charlie 的粒子所处的量子态为

$$\left|\Phi(k)\right>^5=\sum_{m=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\{\alpha_m\beta_j w^{d_1 kj}\left|(g_{L-1}(k,m,j)\right.\oplus k_{L-1}\oplus j_{L-1})\cdots(g_1(k,m,j)\oplus k_1\oplus j_1)(g_0(k,m,j)\oplus k_0\oplus j_0)>_C\}. \quad (17)$$

Bob将测量结果 k, $g_i(k,\ m,\ j)(i=0,\ 1,\ \cdots,\ L-1)$ 通知 Charlie.

则 Charlie 作以下幺正操作:

$$w^{d_1 kj}\mid(g_{L-1}(k,m,j)\oplus k_{L-1}\oplus j_{L-1})>_{C_{L-1}}\longrightarrow\mid m_{L-1}\oplus j_{L-1}>_{C_{L-1}},$$
$$\mid g_i(k,m,j)\oplus k_i\oplus j_i>_{C_i}\longrightarrow\mid m_i\oplus j_i>_{C_i}, \quad (18)$$

式中 $i=0,\ 1,\ \cdots,\ L-2$.

则 Charlie 的粒子所处的量子态为

$$\left|\Phi\right>^6=\sum_{m=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\alpha_m\beta_j\left|(m_{L-1}\oplus j_{L-1})\cdots(m_1\oplus j_1)(m_0\oplus j_0)\right>_C. \quad (19)$$

(19)式表明 Alice 和 Bob 已成功将自己拥有的未知量子态隐形传态给 Charlie.

假设有 $N+1$ 方(Bob1, Bob2, …, BobN, Alice)共享 $(N+1)L$ 个 2 级 GHZ 最大纠缠态粒子, 相应地 Bob1, Bob2, …, BobN, Alice 拥有的粒子分别标为 B_0^1, B_1^1, …, B_{L-1}^1; B_0^2, B_1^2, …, B_{L-1}^2; …; B_0^N, B_1^N, …, B_{L-1}^N; A_0, A_1, …, A_{L-1}. 每一 B_k^1, B_k^2, …, B_k^N, A_k 粒子所处的 GHZ 态可选为如下形式:

$$\left|\Phi\right>_{B_k^1,B_k^2,\cdots,B_k^N,A_k}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 0>_{B_k^1}\mid 0>_{B_k^2}\cdots\mid 0>_{B_k^N}\mid 0>_{A_k}+\mid 1>_{B_k^1}\mid 1>_{B_k^2}\cdots\mid 1>_{B_k^N}\mid 1>_{A_k}). \quad (20)$$

假设$\mathrm{Bob}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$拥有一 d_i 级未知量子态$(d_1 d_2\cdots d_N\leqslant 2^L)$.

$$\left|\varphi\right>_i=\sum_{j=0}^{d_i-1}\alpha_j^i\left|j\right>, \text{其中}\sum_{j=0}^{d_i-1}\left|\alpha_j^i\right|^2=1. \quad (21)$$

Bob1, Bob2, …, BobN 把他们的未知量子态隐形传态给 Alice. 具体实施过程类似于三方的量子隐形传态方案.

2 一方到多方的量子隐形传态

假设有三方(Alice, Bob, Charlie)共享 $3L$ 个 2 级 GHZ 最大纠缠态粒子, 相应地 Alice, Bob 和 Charlie 拥有的粒子分别标为 A_0, A_1, …, A_{L-1}; B_0, B_1, …, B_{L-1}; C_0, C_1, …, C_{L-1}. 每一 A_k, B_k, C_k 粒子所处的 GHZ 态可选为如下形式:

$$\mid\Phi>_{A_k,B_k,C_k}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 0>_{A_k}\mid 0>_{B_k}\mid 0>_{C_k}+\mid 1>_{A_k}\mid 1>_{B_k}\mid 1>_{C_k}). \quad (22)$$

假设 Charlie 拥有一 d 级未知量子态

$$\left|\varphi\right>=\sum_{i=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\alpha_i\beta_j\left|i+jd_1\right>, \quad (23)$$

其中$\sum_{i=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}|\alpha_i|^2|\beta_j|^2=1$.

该未知量子态 $\mid\varphi>$包含了两个 d_1 级和 d_2 级的量子态信息. Charlie 想把第一个 d_1 级量子态隐形传态给 Alice, 把第二个 d_2 级量子态隐形传态给 Bob. 则 Charlie 的未知量子态以及三方所共享的 GHZ 最大纠缠态所组成的复合系统的量子态为

$$\left|\Phi\right>_{\text{total}}=\left|\varphi\right>\otimes\prod_{k=0}^{L-1}\left|\Phi\right>_{A_k,B_k,C_k}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_i\beta_j\mid i+jd_1>_\varphi\mid\overline{n}>_A\mid\overline{n}>_B\mid\overline{n}>_C. \quad (24)$$

Charlie 对未知的量子态和拥有的 GHZ 粒子作 $U_{\varphi C}$ 幺正操作, $U_{\varphi C}$ 幺正操作定义为

$$U_{\varphi C}\mid i+jd_1>_\varphi\mid\overline{n}>_C=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=0}^{d-1}w^{k(i+jd_1)}\mid k>_\varphi\mid\overline{f(i+jd_1,k,n)}>c. \quad (25)$$

(25)式中的 $\mid\overline{f(i+jd_1,\ k,\ n)}>$类似于(6—9)式中的 $\mid\overline{f(k,\ m,\ n)}>$的定义.

容易证明 $U_{\varphi C}$ 的幺正性，在 $U_{\varphi C}$ 操作之后，总的量子态为

$$\left|\Phi>_{\text{total}}^{1}=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=0}^{d-1}\left\{\left|k>_{\varphi}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\sum_{n=0}^{N-1}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\alpha_i\beta_j w^{k(i+jd_1)}\left|\overline{n}>_A\right|\overline{n}>_B\left|\overline{f(i+jd_1,k,n)}>_C\right.\right\}. \tag{26}$$

Charlie 分别对未知量子态和 C_0，C_1，…，C_{L-1} 进行投影测量，则 Alice 和 Bob 的粒子所处的量子态为

$$\left|\Phi(k)>^2=\sum_{i=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\left\{\alpha_i\beta_j w^{k(i+jd_1)}\right|\right.$$
$$(f_{L-1}(i+jd_1,k,n)\oplus(i+jd_1)_{L-1}\oplus k_{L-1})\cdots$$
$$(f_1(i+jd_1,k,n)\oplus(i+jd_1)_1\oplus k_1)\cdot$$
$$(f_0(i+jd_1,k,n)\oplus(i+jd_1)_0\oplus k_0)>_A$$
$$|(f_{L-1}(i+jd_1,k,n)\oplus(i+jd_1)_{L-1}\oplus k_{L-1})\cdots$$
$$(f_1(i+jd_1,k,n)\oplus(i+jd_1)_1\oplus k_1)(f_0(i+jd_1,k,n)$$
$$\left.\oplus(i+jd_1)_0\oplus k_0>B\right\}. \tag{27}$$

Charlie 将测量结果 k，$f_m(i+jd_1,k,n)(m=0,1,\cdots,L-1)$ 通知 Alice 和 Bob.

Alice 作以下幺正操作：

$$w^{k(i+jd_1)}|(f_{L-1}(i+jd_1,k,n)\oplus(i+jd_1)_{L-1}\oplus k_{L-1})>_{A_{L-1}}\longrightarrow|i+jd_1>_{A_{L-1}},$$
$$|(f_m(i+jd_1,k,n)\oplus(i+jd_1)_m\oplus k_m)>_{A_m}\longrightarrow|i+jd_1>_{A_m}, \tag{28}$$

式中 $m=0,1,\cdots,L-2$.

Bob 作以下幺正操作：

$$|(f_m(i+jd_1,k,n)\oplus(i+jd_1)_m\oplus k_m)>_{B_m}\longrightarrow|i+jd_1>_{B_m}, \tag{29}$$

式中 $m=0,1,\cdots,L-1$.

则 Alice 和 Bob 的粒子所处的量子态为

$$\left|\Phi>^3=\sum_{k=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\alpha_k\beta_j\right|\overline{k+jd_1}>_A|\overline{k+jd_1}>_B. \tag{30}$$

Alice 对她的 L 个 GHZ 粒子作一个 d_1 维的离散 Fourier 变换

$$\left|\overline{k+jd_1}>_A\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{d_1}}\sum_{m_1=0}^{d_1-1}e^{\frac{i2\pi m_1k}{d_1}}\right|\overline{m_1+jd_1}>_A. \tag{31}$$

Bob 对她的 L 个 GHZ 粒子作一个 d_2 维的离散 Fourier 变换

$$\left|\overline{k+jd_1}>_B\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{d_2}}\sum_{m_2=0}^{d_2-1}e^{\frac{i2\pi m_2j}{d_2}}\right|\overline{k+m_2d_1}>_B. \tag{32}$$

Alice 和 Bob 的 L 对 GHZ 粒子的量子态变成

$$\left|\Phi>^4=\frac{1}{\sqrt{d_1d_2}}\sum_{m_1=0}^{d_1-1}\sum_{k=0}^{d_1-1}\sum_{m_2=0}^{d_2-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\alpha_k\beta_j e^{\frac{i2\pi m_1k}{d_1}}e^{\frac{i2\pi m_2j}{d_2}}\right.$$
$$\left|\overline{m_1+jd_1}>_A\right|\overline{k+m_2d_1}>_B. \tag{33}$$

Alice 和 Bob 分别对他们的 GHZ 粒子实施 U_1 和 U_2 幺正操作

$$U_1\left|\overline{m_1+jd_1}>_A=e^{\frac{i2\pi m_2j}{d_2}}\right|\overline{m_1+jd_1}>_A, \tag{34}$$
$$U_2\left|\overline{k+m_2d_1}>_B=e^{\frac{i2\pi m_1k}{d_1}}\right|\overline{k+m_2d_1}>_B. \tag{35}$$

最后 Alice 和 Bob 的量子态为

$$\left|\Phi>^5=\frac{1}{\sqrt{d_1d_2}}\sum_{m_1=0}^{d_1-1}\sum_{j=0}^{d_2-1}\beta_j\right|\overline{m_1+jd_1}>_A\cdot$$
$$\sum_{m_2=0}^{d_2-1}\sum_{k=0}^{d_1-1}\alpha_k\left|\overline{k+m_2d_1}>_B\right.. \tag{36}$$

(36)式表明 Alice 和 Bob 已分别拥有一个未知量子态，量子隐形传态方案成功.

假设有 $N+1$ 方(Alice，Bob1，Bob2，…，Bob$N$)共享$(N+1)L$ 个 2 级 GHZ 最大纠缠态粒子，相应地 Alice，Bob1，Bob2，…，Bob$N$ 拥有的粒子分别标为 A_0，A_1，…，A_{L-1}；B_0^1，B_1^1，…，B_{L-1}^1；B_0^2，B_1^2，…，B_{L-1}^2；…；B_0^N，B_1^N，…，B_{L-1}^N. 每一 A_k，B_k^1，B_k^2，…，B_k^N 粒子的 GHZ 态可选为如下形式：

$$|\Phi>_{A_k,B_k^1,B_k^2,\cdots,B_k^N}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>_{A_k}|0>_{B_k^1}|0>_{B_k^2}\cdots|0>_{B_k^N}+|1>_{A_k}|1>_{B_k^1}|1>_{B_k^2}\cdots|1>_{B_k^N}).\quad(37)$$

假设 Alice 有一 d 级未知量子态，它包含了 d_1，d_2，…，d_N 级的量子态信息($d_1d_2\cdots d_N=d$，$d_1d_2\cdots d_N\leqslant 2^L$).

$$\left|\varphi>=\sum_{k_1=0}^{d_i-1}\sum_{k_2=0}^{d_2-1}\cdots\sum_{k_N=0}^{d_N-1}\alpha_{k_1}^1\alpha_{k_2}^2\cdots\alpha_{k_N}^N\right|k_Np_N+\cdots+k_2p_2+k_1p_1>,\quad(38)$$

其中 $\sum_{k_1=0}^{d_i-1}\sum_{k_2=0}^{d_2-1}\cdots\sum_{k_N=0}^{d_N-1}|\alpha_{k_1}^1|^2|\alpha_{k_2}^2|^2\cdots|\alpha_{k_N}^N|^2=1$，且 $p_1=1, p_i=d_1d_2\cdots d_{i-1}(i\neq 1)$.
Alice 把她的未知量子态隐形传态给 Bob1，Bob2，…，Bob$N$. 具体实施过程类似于三方的量子隐形传态方案.

3 多方到多方的量子隐形传态

假定有 $N+M$ 方(N 个发送者 Bob 和 M 个接收者 Alice)共享处于二级最大纠缠 GHZ 态的($N+M$)L ($2^L\geqslant d_1d_2d_3\cdots d_N$，$d_i$ 为 N 方所隐形传态的各未知量子态的维数)个粒子. Bob$_i$($i=1$, 2, …, N)拥有一 d_i 级未知量子态($d_1d_2\cdots d_N\leqslant 2^L$). $N+1$ 方(每一 Bob 和 Alice1)实施多方到一方的量子隐形传态方案，同时，每一 Bob 把测量结果发送给每一 Alice. Alice2，Alice3，…，Alice$M$ 对自己的粒子作相应的幺正操作，那么 M 个 Alice 将共享 N 个 d 级量子态

$$\left|\varphi>=\sum_{k_1=0}^{d_i-1}\sum_{k_2=0}^{d_2-1}\cdots\sum_{k_N=0}^{d_N-1}\alpha_{k_1}^1\alpha_{k_2}^2\cdots\alpha_{k_N}^N\right|k_Np_N+\cdots+k_2p_2+k_1p_1>|k_Np_N+\cdots+k_2p_2+k_1p_1>\cdots|k_Np_N+\cdots+k_2p_2+k_1p_1>.\quad(39)$$

然后 M 个 Alice 可以实施一方到多方的量子隐形传态方案. 当发送者也是接收者时，L 个二级最大纠缠态粒子可以用来同时对两个量子态进行双向隐形传态.

4 总结

有限级未知量子纯态不仅可以通过共享的两级 EPR 纠缠态粒子隐形传态到一组两级粒子上，而且可以在一定条件下在多方之间进行隐形传态. 本文提出的方案表明 N 方可以利用处于二级 GHZ 最大纠缠态的($N+M$)·L 个粒子把 N 个未知量子态隐形传态给 M 个其他方. 也表明 L 个二级 EPR 最大纠缠态可以用来同时对两个量子态进行双向隐形传态. 另外本文只考虑了共享量子信道为二级 GHZ 最大纠缠态的情况，利用更一般的量子信道进行隐形传态以及最佳隐形传态也是值得研究的.

参考文献

1 Bennett C H, Brassard G. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. Phys Rev Lett, 1993, 70: 1895—1900
2 Vaidman L. Teleportation of quantum states. Phys Rev A, 1994, 49: 1473—1478
3 Braunstein S L, Kimble H J. Teleportation of continuous quantum variables. Phys Rev Lett, 1998, 80: 869—874
4 Yu S X, Sun C P. Canonical quantum teleportation. http://xxx.lanl.gov/list/quant-ph/0001052 [2004-01-20]
5 Boschi D, Branca S, De Martini F, et al. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. Phys Rev Lett, 1998, 80: 1121—1126
6 Vaidman L, Yoran N. Methods for reliable teleportation. Phys Rev A, 1999, 59: 116—120
7 Stenholm S, Bardo P J. Teleportation of N-dimensional states. Phys Rev A, 1998, 58: 4373—4378
8 Karlsson A, Bourennane M. Quantum teleportation using three-particle entanglement. Phys Rev A, 1998, 58: 4394—4398
9 Ralph T C, Lam P K. Teleportation with bright squeezed light. Phys Rev Lett, 1998, 81: 5668—5673
10 Zubairy M S. Quantum teleportation of a field state. Phys Rev A, 1998, 58: 4368—4373
11 Maierle C S, Lidar D A, Harris R A. How to teleport superpositions of chiral amplitudes. Phys Rev Lett, 1998, 81: 5928—5933
12 Hillery M, Bužek V, Berthiaume A. Quantum secret sharing. Phys Rev A, 1999, 59: 1829—1833
13 Murao M, Plenio M B, Vedral V. Quantum-information distribution via entanglement. Phys Rev A, 2000, 61: 032311—032315
14 Ghiu I. Asymmetric quantum telecloning of d-level systems and broadcasting of entanglement to different locations using the "many-to-many" communication protocol. Phys Rev A, 2003, 67: 012323—012328
15 Andrzej Grudka. Quantum teleportation between multiparties. http://xxx.lanl.gov/list/quant-ph/0303112 [2004-01-20]
16 Brassard G, Mann A. Measurement of the Bell operator and quantum teleprtation. Phys Rev A, 1995, 51: 1727